第４講　整数の性質

1

(1)　不定方程式

$7x-31y=1$ ……………①

を満たす自然数 x，y の組の中で，x が最小のものは

$x=$ [ア]，　$y=$ [イ]

であり，不定方程式①のすべての整数解は，k を整数として

$x=$ [ウエ] $k+$ [ア]，　$y=$ [オ] $k+$ [イ]

と表せる。

（次ページに続く。）

(2)　自然数 n に対し，n^2 を オ で割った余りが イ となるのは，n を オ で割った余りが， **カ** または **キ** のときである。ただし， カ ， キ の解答の順序は問わない。

(3)　不定方程式①の整数解 y のうち，ある自然数 n を用いて $y=n^2$ と表せるものを小さい方から四つ並べると

ク ， **ケコ** ， **サシス** ， **セソタ**

である。

(4)　$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数であるような自然数 x のうち，$x \geqq 1000$ を満たす最小のものは **チツテト** である。x が チツテト のとき，$\sqrt{31(7x-1)}$ の値は **ナニヌ** である。

2　正の整数 m に対して

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m,\ a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす整数 a，b，c，d の組がいくつあるかを考える。

(1)　$m=14$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\right)$$

のただ一つである。

また，$m=28$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

(2)　a が奇数のとき，整数 n を用いて $a=2n+1$ と表すことができる。このとき，$n(n+1)$ は偶数であるから，次の条件がすべての奇数 a で成り立つような正の整数 h のうち，最大のものは $h=\boxed{\text{カ}}$ である。

条件：a^2-1 は h の倍数である。

よって，a が奇数のとき，a^2 を $\boxed{\text{カ}}$ で割ったときの余りは1である。

また，a が偶数のとき，a^2 を $\boxed{\text{カ}}$ で割ったときの余りは，0または4のいずれかである。

（次ページに続く。）

(3)　(2)により，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が [カ] の倍数ならば，整数 a，b，c，d のうち，偶数であるものの個数は [キ] 個である。

(4)　(3)を用いることにより，m が [カ] の倍数であるとき，①を満たす整数 a，b，c，d が求めやすくなる。

例えば，$m=224$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

([クケ]，[コ]，[サ]，[シ])

のただ一つであることがわかる。

(5)　7の倍数で896の約数である正の整数 m のうち，①を満たす整数 a，b，c，d の組の個数が [オ] 個であるものの個数は [ス] 個であり，そのうち最大のものは $m=$ [セソタ] である。

第４講　整数の性質

1 (1)　$7x-31y=1$　……①　$\iff$　$7x=31y+1$ は，y が最小のとき x も最小となる。

$y=1$ のとき　$7x=32$　　これを満たす自然数 x はない

$y=2$ のとき　$7x=63$　　$x=9$

したがって，①を満たす自然数 x，y の組の中で，x が最小のものは

$x=9$，$y=2$

よって，不定方程式①の解の１つが $x=9$，$y=2$ であるから

$7\cdot9-31\cdot2=1$　……②

が成立する。①－②より

$7(x-9)-31(y-2)=0$　　つまり　$7(x-9)=31(y-2)$

７と31は互いに素であるから，$x-9$は31の倍数である。よって，整数 k を用いて

$x-9=31k$

と表される。したがって，不定方程式①のすべての整数解は，整数 k を用いて

$x=31k+9$，$y=7k+2$

と表される。

(2)　自然数 n を７で割った余りを r ($r=0$，1，2，……，6) とすると，n は整数 m を用いて

$n=7m+r$

と表される。このとき

$$\begin{aligned} n^2&=(7m+r)^2\\ &=49m^2+14mr+r^2\\ &=7(7m^2+2mr)+r^2 \end{aligned}$$

よって，n^2 を７で割った余りは，r^2 を７で割った余りと一致する。

$r^2=0$，1，4，9，16，25，36

であることから，n^2 を７で割った余りが２になるのは，r^2 を７で割った余りが２になるとき，すなわち　$r=3$，4 のときである。

したがって，自然数 n に対し，n^2 を７で割った余りが２となるのは，n を７で割った余りが３または４のときである。

(参考)

$n=7k\pm1$ のとき　$n^2=(7k\pm1)^2=49k^2\pm14k+1=7(7k^2\pm2k)+1$

$n=7k\pm2$ のとき　$n^2=(7k\pm2)^2=49k^2\pm28k+4=7(7k^2\pm4k)+4$

$n=7k\pm3$ のとき　$n^2=(7k\pm3)^2=49k^2\pm42k+9=7(7k^2\pm6k+1)+2$

(3)　不定方程式①の整数解 y は，(1)より整数 k を用いて $y=7k+2$ と表される。つまり，y を７で割ると余りが２である。

この整数 y が，自然数 n を用いて $y=n^2$ と表されるとき，(2)より n を７で割った余りが３または４である。そのような自然数 n を小さい方から四つ並べると

$n=3,\ 4,\ 10,\ 11$

である。このとき，n^2 すなわち y は小さい方から順に 9，16，100，121 である。

(4)　$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数となるのは，$7x-1$ が整数 y，n^2を用いて

$7x-1=31y\quad(y=n^2)$

と表されるときである。

$7x-1=31y$ は，不定方程式①と一致し，その解は(1)より整数 k を用いて

$x=31k+9,\ y=7k+2$

と表される。また，$y=n^2$ と表されるとき，(2)より n を 7 で割った余りが 3 または 4 である。

$x\geqq 1000$ より，$31k+9\geqq 1000$　　$k\geqq \dfrac{991}{31}=31.9\cdots\cdots$　　よって，$k\geqq 32$

このとき，$y=7k+2\geqq 7\cdot 32+2=226$

また，$y=n^2$ を満たす自然数 n は，小さい方より $n=3,\ 4,\ 10,\ 11,\ 17,\ \cdots\cdots$ であり，n^2 すなわち y は小さい方から順に 9，16，100，121，289，…… である。

よって，$y\geqq 226$ かつ $y=n^2$ を満たす最小の自然数 y は $y=289$

このとき $7k+2=289$ より $k=41$ であり，$x=31k+9=31\cdot 41+9=1280$

したがって，$\sqrt{31(7x-1)}$ が整数となるような自然数 x のうち，$x\geqq 1000$ を満たす最小のものは $x=1280$ である。

このとき，$\sqrt{31(7x-1)}=\sqrt{31\cdot 31y}=\sqrt{31^2\cdot n^2}=\sqrt{31^2\cdot 17^2}=31\cdot 17=527$

2　$a^2+b^2+c^2+d^2=m,\ a\geqq b\geqq c\geqq d\geqq 0\quad\cdots\cdots$①

(1)　$m=14$ のとき

$a^2+b^2+c^2+d^2=14$

$a\geqq 4$ のとき，$a^2\geqq 16>14$ であるから，$a\leqq 3$

$a=3$ のとき　$b^2+c^2+d^2=5$

これを満たす整数 $b,\ c,\ d\ (b\geqq c\geqq d\geqq 0)$ の組は，$(b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 0)$ のみ

$a\leqq 2$ のとき　$a^2+b^2+c^2+d^2=14$ を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d\ (a\geqq b\geqq c\geqq d)$ の組はない。

したがって，$m=14$ のとき，①を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組は

$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 2,\ 1,\ 0)$

のただ一つである。

$m=28$ のとき

$a^2+b^2+c^2+d^2=28$

$a\geqq 6$ のとき，$a^2\geqq 36>28$ であるから，$a\leqq 5$

$a=5$ のとき　$b^2+c^2+d^2=3$

これを満たす整数 $b,\ c,\ d\ (b\geqq c\geqq d\geqq 0)$ の組は，$(b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 1)$ のみ

$a=4$ のとき　$b^2+c^2+d^2=12$

これを満たす整数 b，c，d $(b \geqq c \geqq d \geqq 0)$ の組は，$(b,\ c,\ d)=(2,\ 2,\ 2)$ のみ

$a=3$ のとき　$b^2+c^2+d^2=19$

これを満たす整数 b，c，d $(b \geqq c \geqq d \geqq 0)$ の組は，$(b,\ c,\ d)=(3,\ 3,\ 1)$ のみ

$a \leqq 2$ のとき　$a^2+b^2+c^2+d^2=28$ を満たす整数 a，b，c，d $(a \geqq b \geqq c \geqq d)$ の組はない。

したがって，$m=28$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組は

$(a,\ b,\ c,\ d)=(5,\ 1,\ 1,\ 1)$，$(4,\ 2,\ 2,\ 2)$，$(3,\ 3,\ 3,\ 1)$

の3個である。

(2)　a が奇数のとき，$a=2n+1$ (n は整数) と表され

$$a^2-1=(a+1)(a-1)=(2n+2)\cdot 2n=4n(n+1)$$

$n(n+1)$ は連続2整数の積，すなわち偶数であるから，$4n(n+1)$ は8の倍数である。

よって，a^2-1 が h の倍数であることがすべての奇数 a で成り立つとき，正の整数 h の最大値は $h=8$ である。

よって，a が奇数のとき，a^2-1 を8で割ったときの余りは0であるから，a^2 を8で割った余りは1である。

また，a が偶数のとき，$a=2m$ (m は整数) と表され

$$a^2=(2m)^2=4m^2$$

を8で割ったときの余りは，0 (m^2 が偶数のとき) または4 (m^2 が奇数のとき) である。

(3)　(2)より

整数 a が奇数のとき　a^2 を8で割ったときの余りは1

整数 a が偶数のとき　a^2 を8で割ったときの余りは0か4

である。

$a^2+b^2+c^2+d^2$ が8の倍数ならば，a^2，b^2，c^2，d^2 をそれぞれ8で割ったときの余りの和が8の倍数(0含む)である。ここで(2)の結果より，整数 a，b，c，d のうち1つでも奇数であるならば，a^2，b^2，c^2，d^2 をそれぞれ8で割ったときの余りの和が8の倍数になることはない。したがって，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が8の倍数ならば，整数 a，b，c，d のうち，偶数であるものの個数は4個，つまり a，b，c，d はすべて偶数である。

(4)　$m=224=8\cdot 28$，つまり　8の倍数のとき

①，すなわち $a^2+b^2+c^2+d^2=224$，$a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0$ を満たす整数 a，b，c，d はすべて偶数であるので

$a=2a_1$，$b=2b_1$，$c=2c_1$，$d=2d_1$ (a_1，b_1，c_1，d_1 は $a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \geqq d_1 \geqq 0$ を満たす整数)とおくことができる。このとき

$$(2a_1)^2+(2b_1)^2+(2c_1)^2+(2d_1)^2=224$$

$$a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2=56=8\cdot 7$$

同様に，$a_1=2a_2$，$b_1=2b_2$，$c_1=2c_2$，$d_1=2d_2$ (a_2，b_2，c_2，d_2 は $a_2 \geqq b_2 \geqq c_2 \geqq d_2 \geqq 0$ を満たす整数)とおくことができ

$(2a_2)^2+(2b_2)^2+(2c_2)^2+(2d_2)^2=56$

$a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2+d_2{}^2=14$

これを満たす a_2，b_2，c_2，d_2 は⑴より $(a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2)=(3,\ 2,\ 1,\ 0)$ のただ一つである。

したがって，$m=224$ のとき，①を満たす整数 a，b，c，d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$(a,\ b,\ c,\ d)=(4a_2,\ 4b_2,\ 4c_2,\ 4d_2)=(12,\ 8,\ 4,\ 0)$

のただ一つである。

⑸　7 の倍数で $896=7\cdot2^7$ の約数である正の整数 m は

$m=7,\ 2\cdot7,\ 2^2\cdot7,\ 2^3\cdot7,\ 2^4\cdot7,\ 2^5\cdot7,\ 2^6\cdot7,\ 2^7\cdot7$

の 8 個であり，これらの m に関して，①を満たす整数 a，b，c，d の組の個数が 3 個であるものの個数を求める。⑴より，$m=2\cdot7=14$ は満たさず，$m=2^2\cdot7=28$ は満たす。

ここで，$m=2^3\cdot7,\ 2^4\cdot7,\ 2^5\cdot7,\ 2^6\cdot7,\ 2^7\cdot7$ は 8 の倍数であるから，⑶を用いることによりそれぞれ，$m=2\cdot7,\ 2^2\cdot7,\ 2\cdot7,\ 2^2\cdot7,\ 2\cdot7$ として考えることができる。

また，$m=7$ のとき

$a^2+b^2+c^2+d^2=7,\ a\geqq b\geqq c\geqq d\geqq0$

を満たす整数 a，b，c，d の組は，$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 1,\ 1)$ のみ（1 組）である。

以上より，7 の倍数で 896 の約数である正の整数 m のうち，①を満たす整数 a，b，c，d の組の個数が 3 個であるものは，$m=2^2\cdot7,\ 2^4\cdot7,\ 2^6\cdot7$ の 3 個であり，そのうち最大のものは $m=2^6\cdot7=448$ である。